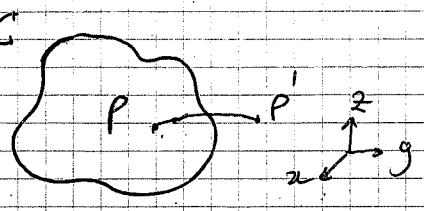
CINEMATICA DELLA DEFORMAZIONE



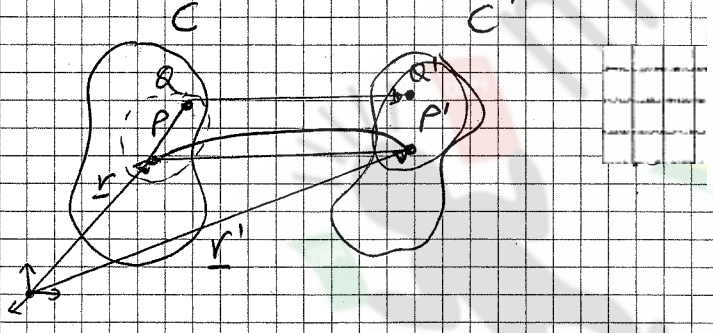
INSIEME DI PUNTI SUI QUALI DEFINIAMO DELLE FUNZIONI. A $t=\emptyset$ ABBIAMO LA CONFIGURAZIONE DEL CORPO (C). IL CORPO È SOTTOPOSTO AD UN CAMPO VETTORIALE DI SPOSTAMENTI. DEFINIAMO DELLE FUNZIONI DI SPOSTAMENTO ($\underline{u}$)

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$\underline{u} = (u, v, w)$

$\underline{u}(x, y, z)$

IL CAMPO DI SPOSTAMENTO È IL PIÙ REGOLARE POSSIBILE. DOPO IL CAMPO, IL CORPO FINISCE IN UNA DIVERSA CONFIGURAZIONE. P VA IN P'



MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$\underline{u}(x, y, z) = (u, v, w)$

$$\begin{cases} x' = x + u(x, y, z) \\ y' = y + v(x, y, z) \\ z' = z + w(x, y, z) \end{cases}$$ NUOVE COORDINATE

$Q = (x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ (INTORNO DEL PUNTO P)

$Q' = ? \quad (\delta x', \delta y', \delta z') = ?$

$\underline{u}$ RELATIVO AL PUNTO Q

$$\underline{u}_Q(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz + \dots$$

SE L'INTERVALLO È PICCOLO NON SVILUPPO IN TERMINI DI ORDINE SUPERIORE (CIOÈ QUELLI DEL 2° ORDINE)

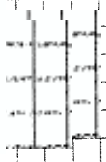
$$\det |J| = 1 - 2x \neq 0 \qquad x \neq \tfrac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \qquad x' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} + \delta x \qquad x' = \frac{1}{2} + \partial x - \left(\tfrac{1}{2} + \partial x\right)^2 = \frac{1}{2} + \partial x - \frac{1}{4} - \partial x^2 - \partial x = \frac{1}{4}$$

MASTER COPY

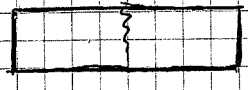
Tel. 388/9837745

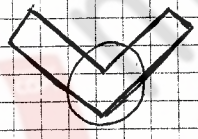


TUTTI I PUNTI VENGONO MANDATI IN $\frac{1}{4}$. SI È PERSA UNA SOLA DIMENSIONE PERCHÉ LA RADICE DEL DETERMINANTE È UNA SOLA. SOLO $\frac{1}{2}$ LO ANNULLA. LA MOLTEPLICITÀ È 1

CONSIDERIAMO COME SONO LE DERIVATE

DISCONTINUITÀ





DISCONTINUITÀ DI DERIVATA

OPPURE POSSIAMO DIRE, CHE LE DERIVATE SONO PICCOLE SE GLI SPOSTAMENTI SONO MOLTO PICCOLI



$\frac{\partial w}{\partial x}$ È DELL'ORDINE DI $\frac{w_{max}}{L}$

QUINDI LA DERIVATA È MOLTO PICCOLA.

BISOGNA SEMPRE TENERE CONTO DEL MAX SPOSTAMENTO E NON DELLE DIMENSIONI.

$$|\det J| = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \det\begin{pmatrix} 1+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} - \frac{\partial u}{\partial y} \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial z} \det\begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & 1+\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 1+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{div}\,\underline{u}} = \underline{\underline{1+\text{div}\,\underline{u}}}$$

I DOPPI PRODOTTI VANNO A $\emptyset$ PERCHÉ DI ORDINE 2

SE $\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \ll 1$ IL J DIVENTA PIÙ FACILE

$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|$ GRANDE ZZA

$$|\det J| = 1+\text{div}\,\underline{u}$$

$$dV' = |J|\,dV = (1+\text{div}\,\underline{u})\,dV = dV + dV\cdot\text{div}\,\underline{u}$$

$$dV' = dV + \text{div}\,\underline{u}\cdot dV$$

$$\underbrace{dV'-dV}_{\text{VARIAZIONE VOLUME}} = \text{div}\,\underline{u}\cdot dV$$

$$\boxed{\frac{dV'-dV}{dV}} = \text{div}\,\underline{u}$$

θ COEFFICIENTE DI DILATAZIONE CUBICA

$$\boxed{\theta = \text{div}\,\underline{u}} \qquad \theta = \varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$$

$\nabla \underline{u}$

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

MATRICE IDENTICA

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta x' = I\,\delta x + \nabla_{\underline{u}}\,\delta x$$

$$\nabla_{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ // & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ * & \sim & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ & \emptyset & \\ & & \emptyset \end{bmatrix}$$

$\mathbb{D}$ (TENSORE)

W MATRICE ROTAZIONE (NON SIMMETRICA)

GLI ELEMENTI DI $\mathbb{D}$ ASSUMONO SIGNIFICATI PARTICOLARI

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{y2} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

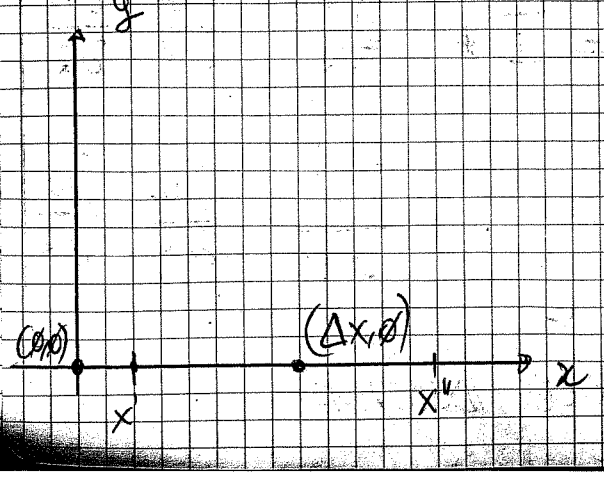
xx, yy, zz RAPPRESENTANO LE VARIAZIONI DI LUNGHEZZA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA

LE MISTE RAPPRESENTANO LE VARIAZIONI DEGLI ANGOLI TRA I SEGMENTI CHE STANNO SU ASSI DIVERSI

NOTA BENE:

NOTA BENE:

ε_{xx}



SOLO $\mu \neq \emptyset$, LE ALTRE $\emptyset$

$$x' = \phi + u(\phi,\phi)$$

$$x'' = \Delta x + u(\phi) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x$$

$$\Delta s' = x'' - x' = \Delta x\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\Delta s = \Delta x$$

$$\frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} = \frac{\Delta x\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx}$$

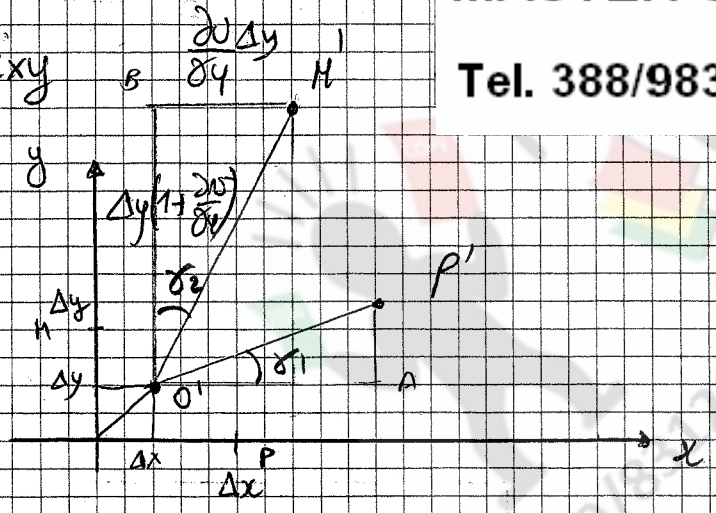
RAPPORTO TRA LA DIFFERENZA DI LUNGHEZZA RISPETTO AD UN SEGMENTO ORIGINARIO

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}}$$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

ε_{xy}



$$\begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w = \phi \end{cases}$$

INIZIALMENTE $\theta = 90°$ DOPO?

$$(\phi,\phi) \longrightarrow (\phi + u,\ \phi + v)$$

$$(\Delta x,\phi) \longrightarrow \left(\Delta x + u(\phi,\phi) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\ ;\ \phi + v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)$$

$$(\phi,\Delta y) \longrightarrow \left(\phi + u\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y,\ \Delta y + v + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)$$

$$O'A = \Delta x\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$AP' = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x \qquad (P'O')^2 = \Delta x^2\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \Delta x^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 =$$